O arbitrażu dla strategii nie dopuszczających krótkiej sprzedaży

Agnieszka Rygiel

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Tarnowie

Szkoła Letnia Matematyki Finansowej 2012

7 maja 2012

Model rynku doskonałego

Model rynku doskonałego

Zakładamy:

Model rynku doskonałego

Zakładamy:

1. równość stóp procentowych depozytów i kredytów bankowych

Model rynku doskonałego

Zakładamy:

1. równość stóp procentowych depozytów i kredytów bankowych
2. nieograniczoną możliwość zaciągania kredytów bankowych

Model rynku doskonałego

Zakładamy:

1. równość stóp procentowych depozytów i kredytów bankowych
2. nieograniczoną możliwość zaciągania kredytów bankowych
3. idealną płynność obrotu wszystkimi instrumentami

Model rynku doskonałego

Zakładamy:

1. równość stóp procentowych depozytów i kredytów bankowych
2. nieograniczoną możliwość zaciągania kredytów bankowych
3. idealną płynność obrotu wszystkimi instrumentami
4. możliwość krótkiej sprzedaży

Model rynku doskonałego

Zakładamy:

1. równość stóp procentowych depozytów i kredytów bankowych
2. nieograniczoną możliwość zaciągania kredytów bankowych
3. idealną płynność obrotu wszystkimi instrumentami
4. możliwość krótkiej sprzedaży
5. brak kosztów transakcyjnych

Model rynku doskonałego

Zakładamy:

1. równość stóp procentowych depozytów i kredytów bankowych
2. nieograniczoną możliwość zaciągania kredytów bankowych
3. idealną płynność obrotu wszystkimi instrumentami
4. możliwość krótkiej sprzedaży
5. brak kosztów transakcyjnych
6. brak podatków od zysków inwestycyjnych

Arbitraż

Arbitraż

Możliwością **arbitrażu** nazywamy strategię finansową, w której istnieje dodatnie prawdopodobieństwo **zysku bez ryzyka** poniesienia strat.

Arbitraż

Możliwością **arbitrażu** nazywamy strategię finansową, w której istnieje dodatnie prawdopodobieństwo **zysku bez ryzyka** poniesienia strat.
Transakcje arbitrażowe - jednoczesne operacje na kilku rynkach wykorzystujące wszelkie niedopasowania cen

Arbitraż

Możliwością **arbitrażu** nazywamy strategię finansową, w której istnieje dodatnie prawdopodobieństwo **zysku bez ryzyka** poniesienia strat.
Transakcje arbitrażowe - jednoczesne operacje na kilku rynkach wykorzystujące wszelkie niedopasowania cen (są one zazwyczaj niewielkie i krótkotrwałe).

Krótka sprzedaż

Krótka sprzedaż

Krótką sprzedażą nazywamy ujemną pozycję na giełdzie, tzn. procedurę polegającą na:

Krótką sprzedażą nazywamy ujemną pozycję na giełdzie, tzn. procedurę polegającą na:

1. pożyczeniu określonej ilości instrumentu finansowego od maklera

Krótką sprzedażą nazywamy ujemną pozycję na giełdzie, tzn. procedurę polegającą na:

1. pożyczeniu określonej ilości instrumentu finansowego od maklera
2. sprzedaniu pożyczonych aktywów

Krótka sprzedaż

Krótką sprzedażą nazywamy ujemną pozycję na giełdzie, tzn. procedurę polegającą na:

1. pożyczeniu określonej ilości instrumentu finansowego od maklera
2. sprzedaniu pożyczonych aktywów

Gra na spadek ceny określonego instrumentu finansowego:

Krótką sprzedażą nazywamy ujemną pozycję na giełdzie, tzn. procedurę polegającą na:

1. pożyczeniu określonej ilości instrumentu finansowego od maklera
2. sprzedaniu pożyczonych aktywów

Gra na spadek ceny określonego instrumentu finansowego:
jeśli cena spadnie, to odkupujemy aktywa i je oddajemy (różnica między kwotą uzyskaną ze sprzedaży a tą przeznaczoną na odkupienie jest naszym zyskiem),

Krótka sprzedaż

Krótką sprzedażą nazywamy ujemną pozycję na giełdzie, tzn. procedurę polegającą na:

1. pożyczeniu określonej ilości instrumentu finansowego od maklera
2. sprzedaniu pożyczonych aktywów

Gra na spadek ceny określonego instrumentu finansowego:
jeśli cena spadnie, to odkupujemy aktywa i je oddajemy (różnica między kwotą uzyskaną ze sprzedaży a tą przeznaczoną na odkupienie jest naszym zyskiem),
jeśli cena wzrośnie - musimy odkupić drożej i ponosimy stratę.

Krótka sprzedaż

Krótka sprzedaż

Transakcja krótkiej sprzedaży instrumentu finansowego jest bardziej ryzykowna niż tradycyjna transakcja kupna. W przypadku kupna - ryzyko dotyczy jedynie kwoty zainwestowanej (kurs nie może spaść poniżej zera), natomiast strata w krótkiej sprzedaży nie ma ograniczenia (cena akcji może rosnąć dowolnie).

Model rynku

Model rynku

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ - przestrzeń probabilistyczna z filtracją
$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T}$;
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0, i = 1, ..., N$,
$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ dla $0 \leq s \leq t \leq T$

Model rynku

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ - przestrzeń probabilistyczna z filtracją
$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$;
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0, i = 1, ..., N$,
$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ dla $0 \leq s \leq t \leq T$
$S_t = (S_t^1, ..., S_t^d)$ - ceny akcji w chwili t

Model rynku

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ - przestrzeń probabilistyczna z filtracją
$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$;
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0, i = 1, ..., N$,
$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ dla $0 \leq s \leq t \leq T$
$S_t = (S_t^1, ..., S_t^d)$ - ceny akcji w chwili t
$S_t^0 = (1 + r)^t$ - wartość 1 zł na rachunku bankowym w chwili t

Model rynku

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ - przestrzeń probabilistyczna z filtracją
$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T}$;
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0, i = 1, ..., N$,
$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ dla $0 \leq s \leq t \leq T$
$S_t = (S_t^1, ..., S_t^d)$ - ceny akcji w chwili t
$S_t^0 = (1 + r)^t$ - wartość 1 zł na rachunku bankowym w chwili t
$\phi_t = (\phi_t^1, ..., \phi_t^d)$ - ilość akcji w portfelu między chwilą $t - 1$ a t

Model rynku

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ - przestrzeń probabilistyczna z filtracją
$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$;
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0, i = 1, ..., N$,
$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ dla $0 \leq s \leq t \leq T$
$S_t = (S_t^1, ..., S_t^d)$ - ceny akcji w chwili t
$S_t^0 = (1 + r)^t$ - wartość 1 zł na rachunku bankowym w chwili t
$\phi_t = (\phi_t^1, ..., \phi_t^d)$ - ilość akcji w portfelu między chwilą $t - 1$ a t
ϕ_t^0 - pozycja na rachunku bankowym między chwilą $t - 1$ a t

Model rynku

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ - przestrzeń probabilistyczna z filtracją
$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$;
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0, i = 1, ..., N$,
$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ dla $0 \leq s \leq t \leq T$
$S_t = (S_t^1, ..., S_t^d)$ - ceny akcji w chwili t
$S_t^0 = (1 + r)^t$ - wartość 1 zł na rachunku bankowym w chwili t
$\phi_t = (\phi_t^1, ..., \phi_t^d)$ - ilość akcji w portfelu między chwilą $t - 1$ a t
ϕ_t^0 - pozycja na rachunku bankowym między chwilą $t - 1$ a t
$V_t^\phi = \sum_{i=0}^{d} \phi_t^i S_t^i$ - wartość porfela w chwili t

Strategię inwestycyjną $\phi = (\phi_t)_{t=1}^T$ nazywamy samofinansującą się, jeżeli

$$\sum_{i=0}^{d} \phi_t^i S_t^i = \sum_{i=0}^{d} \phi_{t+1}^i S_t^i, \ \ t = 0, ..., T - 1$$

Definicja arbitrażu

Strategię inwestycyjną $\phi = (\phi_t)_{t=1}^T$ nazywamy możliwością **arbitrażu**, jeżeli

$$V_0^\phi = 0, \;\; V_T^\phi \geq 0 \text{ p.n. oraz } \mathbb{P}(V_T^\phi > 0) > 0.$$

Definicja arbitrażu

Strategię inwestycyjną $\phi = (\phi_t)_{t=1}^T$ nazywamy możliwością **arbitrażu**, jeżeli

$$V_0^\phi = 0, \;\; V_T^\phi \geq 0 \text{ p.n. oraz } \mathbb{P}(V_T^\phi > 0) > 0.$$

Strategię inwestycyjną $\phi = (\phi_t)_{t=1}^T$ nazywamy możliwością **arbitrażu bez krótkiej sprzedaży**, jeżeli

$$\begin{aligned} \phi_t^i &\geq 0 \text{ dla dowolnego } i = 1, .., d; \;\; t = 1, ..., T \\ V_0^\phi &= 0, \;\; V_T^\phi \geq 0 \text{ p.n. oraz } \mathbb{P}(V_T^\phi > 0) > 0. \end{aligned}$$

Definicja arbitrażu

Strategię inwestycyjną $\phi = (\phi_t)_{t=1}^T$ nazywamy możliwością **arbitrażu**, jeżeli

$$V_0^\phi = 0,\ \ V_T^\phi \geq 0 \text{ p.n. oraz } \mathbb{P}(V_T^\phi > 0) > 0.$$

Strategię inwestycyjną $\phi = (\phi_t)_{t=1}^T$ nazywamy możliwością **arbitrażu bez krótkiej sprzedaży**, jeżeli

$$\begin{aligned} \phi_t^i &\geq 0 \text{ dla dowolnego } i = 1, .., d;\ \ t = 1, ..., T \\ V_0^\phi &= 0,\ \ V_T^\phi \geq 0 \text{ p.n. oraz } \mathbb{P}(V_T^\phi > 0) > 0. \end{aligned}$$

arbitraż bez krótkiej sprzedaży $\Rightarrow$ arbitraż

Przykład 1: model jednookresowy dwustanowy
$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 120$, $S_1(\omega_2) = 110$

Przykład 1: model jednookresowy dwustanowy
$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 120$, $S_1(\omega_2) = 110$
strategia: $\phi = (-100, 1)$

Przykład 1: model jednookresowy dwustanowy

$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 120$, $S_1(\omega_2) = 110$

strategia: $\phi = (-100, 1)$

$V_0^{\phi} = -100 + 100 = 0$

Przykład 1: model jednookresowy dwustanowy
$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 120$, $S_1(\omega_2) = 110$
strategia: $\phi = (-100, 1)$
$V_0^{\phi} = -100 + 100 = 0$
$V_1^{\phi}(\omega_1) = -100(1 + 0,1) + 120 = 10$

Przykład 1: model jednookresowy dwustanowy

$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 120$, $S_1(\omega_2) = 110$

strategia: $\phi = (-100, 1)$

$V_0^{\phi} = -100 + 100 = 0$

$V_1^{\phi}(\omega_1) = -100(1 + 0,1) + 120 = 10$

$V_1^{\phi}(\omega_2) = -100(1 + 0,1) + 110 = 0$

Przykład 1: model jednookresowy dwustanowy
$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 120$, $S_1(\omega_2) = 110$
strategia: $\phi = (-100, 1)$
$V_0^{\phi} = -100 + 100 = 0$
$V_1^{\phi}(\omega_1) = -100(1 + 0,1) + 120 = 10$
$V_1^{\phi}(\omega_2) = -100(1 + 0,1) + 110 = 0$

$$V_0^{\phi} = 0, \;\; V_T^{\phi} \geq 0 \text{ p.n. oraz } \mathbb{P}(V_T^{\phi} \geq 0) > 0.$$

Przykład 1: model jednookresowy dwustanowy
$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 120$, $S_1(\omega_2) = 110$
strategia: $\phi = (-100, 1)$
$V_0^\phi = -100 + 100 = 0$
$V_1^\phi(\omega_1) = -100(1 + 0,1) + 120 = 10$
$V_1^\phi(\omega_2) = -100(1 + 0,1) + 110 = 0$

$$V_0^\phi = 0,\ \ V_T^\phi \geq 0 \text{ p.n. oraz } \mathbb{P}(V_T^\phi \geq 0) > 0.$$

Wniosek: ϕ - strategia arbitrażowa

Przykład 1: model jednookresowy dwustanowy
$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 120$, $S_1(\omega_2) = 110$
strategia: $\phi = (-100, 1)$
$V_0^\phi = -100 + 100 = 0$
$V_1^\phi(\omega_1) = -100(1 + 0,1) + 120 = 10$
$V_1^\phi(\omega_2) = -100(1 + 0,1) + 110 = 0$

$$V_0^\phi = 0,\ \ V_T^\phi \geq 0 \text{ p.n. oraz } \mathbb{P}(V_T^\phi \geq 0) > 0.$$

Wniosek: ϕ - strategia arbitrażowa (strategia nie dopuszczająca krótkiej sprzedaży).

Przykład 2: model jednookresowy dwustanowy
$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 70$, $S_1(\omega_2) = 110$

Przykład 2: model jednookresowy dwustanowy
$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 70$, $S_1(\omega_2) = 110$
strategia: $\phi = (100, -1)$

Przykład 2: model jednookresowy dwustanowy

$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 70$, $S_1(\omega_2) = 110$

strategia: $\phi = (100, -1)$

$V_0^{\phi} = 100 + (-1)100 = 0$

Przykład 2: model jednookresowy dwustanowy

$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 70$, $S_1(\omega_2) = 110$

strategia: $\phi = (100, -1)$

$V_0^{\phi} = 100 + (-1)100 = 0$

$V_1^{\phi}(\omega_1) = 100(1 + 0,1) + (-1)70 = 40$

Przykład 2: model jednookresowy dwustanowy
$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 70$, $S_1(\omega_2) = 110$
strategia: $\phi = (100, -1)$
$V_0^{\phi} = 100 + (-1)100 = 0$
$V_1^{\phi}(\omega_1) = 100(1 + 0,1) + (-1)70 = 40$
$V_1^{\phi}(\omega_2) = 100(1 + 0,1) + (-1)110 = 0$

Przykład 2: model jednookresowy dwustanowy
$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 70$, $S_1(\omega_2) = 110$
strategia: $\phi = (100, -1)$
$V_0^{\phi} = 100 + (-1)100 = 0$
$V_1^{\phi}(\omega_1) = 100(1 + 0,1) + (-1)70 = 40$
$V_1^{\phi}(\omega_2) = 100(1 + 0,1) + (-1)110 = 0$

$$\mathbb{P}(V_1^{\phi} \geq V_0^{\phi}) = 1 \text{ oraz } \mathbb{P}(V_1^{\phi} > V_0^{\phi}) > 0.$$

Przykład 2: model jednookresowy dwustanowy
$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 70$, $S_1(\omega_2) = 110$
strategia: $\phi = (100, -1)$
$V_0^{\phi} = 100 + (-1)100 = 0$
$V_1^{\phi}(\omega_1) = 100(1 + 0,1) + (-1)70 = 40$
$V_1^{\phi}(\omega_2) = 100(1 + 0,1) + (-1)110 = 0$

$$\mathbb{P}(V_1^{\phi} \geq V_0^{\phi}) = 1 \text{ oraz } \mathbb{P}(V_1^{\phi} > V_0^{\phi}) > 0.$$

Wniosek: ϕ - strategia arbitrażowa

Przykład 2: model jednookresowy dwustanowy
$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 70$, $S_1(\omega_2) = 110$
strategia: $\phi = (100, -1)$
$V_0^\phi = 100 + (-1)100 = 0$
$V_1^\phi(\omega_1) = 100(1 + 0,1) + (-1)70 = 40$
$V_1^\phi(\omega_2) = 100(1 + 0,1) + (-1)110 = 0$

$$\mathbb{P}(V_1^\phi \geq V_0^\phi) = 1 \text{ oraz } \mathbb{P}(V_1^\phi > V_0^\phi) > 0.$$

Wniosek: ϕ - strategia arbitrażowa (strategia zakłada krótką sprzedaż).

Przykład 2: model jednookresowy dwustanowy
$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 70$, $S_1(\omega_2) = 110$
strategia: $\phi = (100, -1)$
$V_0^\phi = 100 + (-1)100 = 0$
$V_1^\phi(\omega_1) = 100(1 + 0,1) + (-1)70 = 40$
$V_1^\phi(\omega_2) = 100(1 + 0,1) + (-1)110 = 0$

$$\mathbb{P}(V_1^\phi \geq V_0^\phi) = 1 \text{ oraz } \mathbb{P}(V_1^\phi > V_0^\phi) > 0.$$

Wniosek: ϕ - strategia arbitrażowa (strategia zakłada krótką sprzedaż).
Czy w modelu istnieje możliwość arbitrażu bez krótkiej sprzedaży?

Przypuśćmy, że $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ jest strategią arbitrażową, zatem

spełniony jest układ $\begin{cases} \phi^0 + 100\phi^1 = 0 \\ \phi^0(1 + 0,1) + 70\phi^1 \geq 0 \\ \phi^0(1 + 0,1) + 110\phi^1 \geq 0 \end{cases}$

Przypuśćmy, że $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ jest strategią arbitrażową, zatem

spełniony jest układ $\begin{cases} \phi^0 + 100\phi^1 = 0 \\ \phi^0(1+0,1) + 70\phi^1 \geq 0 \\ \phi^0(1+0,1) + 110\phi^1 \geq 0 \end{cases}$, co daje

$-110\phi^1 + 70\phi^1 \geq 0$

Przypuśćmy, że $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ jest strategią arbitrażową, zatem spełniony jest układ $\begin{cases} \phi^0 + 100\phi^1 = 0 \\ \phi^0(1+0,1) + 70\phi^1 \geq 0 \\ \phi^0(1+0,1) + 110\phi^1 \geq 0 \end{cases}$, co daje $-110\phi^1 + 70\phi^1 \geq 0$, stąd $\phi^1 \leq 0$.

Przypuśćmy, że $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ jest strategią arbitrażową, zatem spełniony jest układ $\begin{cases} \phi^0 + 100\phi^1 = 0 \\ \phi^0(1+0,1) + 70\phi^1 \geq 0 \\ \phi^0(1+0,1) + 110\phi^1 \geq 0 \end{cases}$, co daje $-110\phi^1 + 70\phi^1 \geq 0$, stąd $\phi^1 \leq 0$. Ponadto przynajmniej jedna z nierówności musi być silna, zatem $\phi^1 < 0$.

Przypuśćmy, że $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ jest strategią arbitrażową, zatem

spełniony jest układ $\begin{cases} \phi^0 + 100\phi^1 = 0 \\ \phi^0(1+0,1) + 70\phi^1 \geq 0 \\ \phi^0(1+0,1) + 110\phi^1 \geq 0 \end{cases}$, co daje

$-110\phi^1 + 70\phi^1 \geq 0$, stąd $\phi^1 \leq 0$. Ponadto przynajmniej jedna z nierówności musi być silna, zatem $\phi^1 < 0$.

Wniosek: w modelu nie istnieje możliwosć arbitrażu bez krótkiej sprzedaży.

Definicja martyngału

Definicja martyngału

Adaptowany proces $(X_t)_{t=0}^{T}$ nazywamy martyngałem względem miary $\mathbb{Q}$, jeżeli

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = X_t \text{ dla } t = 0, ..., T-1.$$

Definicja martyngału

Adaptowany proces $(X_t)_{t=0}^{T}$ nazywamy martyngałem względem miary $\mathbb{Q}$, jeżeli

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = X_t \text{ dla } t = 0, \ldots, T-1.$$

Nadmartyngałem względem miary $\mathbb{Q}$ nazywamy taki adaptowany proces X, że

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) \leq X_t \text{ dla } t = 0, \ldots, T-1.$$

Definicja martyngału

Adaptowany proces $(X_t)_{t=0}^{T}$ nazywamy martyngałem względem miary $\mathbb{Q}$, jeżeli

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = X_t \text{ dla } t = 0, ..., T-1.$$

Nadmartyngałem względem miary $\mathbb{Q}$ nazywamy taki adaptowany proces X, że

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) \leq X_t \text{ dla } t = 0, ..., T-1.$$

Wszystkie martyngały są nadmartyngałami, ale nie każdy nadmartyngał jest martyngałem.

Wycena arbitrażowa

Wycena arbitrażowa

Miarę $\mathbb{Q}$ nazywamy równoważną miarą martyngałową dla zdyskontowanego procesu cen $\tilde{S}$, gdy miara $\mathbb{Q}$ jest równoważna z $\mathbb{P}$ oraz $\tilde{S}$ jest martyngałem względem $\mathbb{Q}$.

Miarę $\mathbb{Q}$ nazywamy równoważną miarą martyngałową dla zdyskontowanego procesu cen $\tilde{S}$, gdy miara $\mathbb{Q}$ jest równoważna z $\mathbb{P}$ oraz $\tilde{S}$ jest martyngałem względem $\mathbb{Q}$.

Pierwsze fundamnetalne twierdzenie arbitrażowe

Nie ma możliwości arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje równoważna miara martyngałowa.

Wycena arbitrażowa

Miarę $\mathbb{Q}$ nazywamy równoważną miarą martyngałową dla zdyskontowanego procesu cen $\tilde{S}$, gdy miara $\mathbb{Q}$ jest równoważna z $\mathbb{P}$ oraz $\tilde{S}$ jest martyngałem względem $\mathbb{Q}$.

Pierwsze fundamnetalne twierdzenie arbitrażowe

Nie ma możliwości arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje równoważna miara martyngałowa.
Cena arbitrażowa w chwili t instrumentu osiągalnego o wypłacie X jest dana wzorem

$$C_t(X) = S_t^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_T / S_T^0 \mid \mathcal{F}_t),$$

gdzie $\mathbb{Q}$ jest dowolną miarą martyngałową.

Przykład 3: model jednookresowy dwustanowy
$S_0 = 100$; $r = 10\%$; $\tilde{S}_1(\omega_1) = 120$; $\tilde{S}_1(\omega_2) = 90$; $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = 0,25$; $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = 0,75$

Przykład 3: model jednookresowy dwustanowy
$S_0 = 100$; $r = 10\%$; $\tilde{S}_1(\omega_1) = 120$; $\tilde{S}_1(\omega_2) = 90$; $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = 0,25$; $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = 0,75$
X - wypłata opcji kupna z ceną realizacji $111,1$:
$X(\omega_1) = 11, X(\omega_2) = 0$

Przykład 3: model jednookresowy dwustanowy

$S_0 = 100$; $r = 10\%$; $\tilde{S}_1(\omega_1) = 120$; $\tilde{S}_1(\omega_2) = 90$; $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = 0,25$; $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = 0,75$

X - wypłata opcji kupna z ceną realizacji $111,1$:

$X(\omega_1) = 11, X(\omega_2) = 0$

Wtedy $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_1 \mid \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_1) = 120q_1 + 90q_2$, gdzie $\mathbb{Q}(\{\omega_i\}) = q_i$

Przykład 3: model jednookresowy dwustanowy
$S_0 = 100$; $r = 10\%$; $\tilde{S}_1(\omega_1) = 120$; $\tilde{S}_1(\omega_2) = 90$; $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = 0,25$; $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = 0,75$
X - wypłata opcji kupna z ceną realizacji $111,1$:
$X(\omega_1) = 11, X(\omega_2) = 0$
Wtedy $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_1 \mid \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_1) = 120q_1 + 90q_2$, gdzie $\mathbb{Q}(\{\omega_i\}) = q_i$

$$\begin{cases} 120q_1 + 90q_2 = 100 \\ q_1 + q_2 = 1 \\ q_1 > 0, q_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow q_1 = 1/3, q_2 = 2/3$$

Przykład 3: model jednookresowy dwustanowy

$S_0 = 100$; $r = 10\%$; $\tilde{S}_1(\omega_1) = 120$; $\tilde{S}_1(\omega_2) = 90$; $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = 0,25$; $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = 0,75$

X - wypłata opcji kupna z ceną realizacji $111,1$:

$X(\omega_1) = 11, X(\omega_2) = 0$

Wtedy $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_1 \mid \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_1) = 120q_1 + 90q_2$, gdzie $\mathbb{Q}(\{\omega_i\}) = q_i$

$$\begin{cases} 120q_1 + 90q_2 = 100 \\ q_1 + q_2 = 1 \\ q_1 > 0, q_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow q_1 = 1/3, q_2 = 2/3$$

Zatem $C(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_T/S_T^0) = 10q_1 + 0q_2 \approx 3,33.$

Przykład 2: model jednookresowy dwustanowy
$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 70$, $S_1(\omega_2) = 110$

Przykład 2: model jednookresowy dwustanowy

$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 70$, $S_1(\omega_2) = 110$

$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_1 \mid \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_1) = \frac{70}{1{,}1} q_1 + \frac{110}{1{,}1} q_2$

Przykład 2: model jednookresowy dwustanowy

$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 70$, $S_1(\omega_2) = 110$

$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_1 \mid \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_1) = \frac{70}{1{,}1} q_1 + \frac{110}{1{,}1} q_2$

$$\begin{cases} \frac{70}{1{,}1} q_1 + \frac{110}{1{,}1} q_2 = 100 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow q_1 = 1, q_2 = 0$$

Przykład 2: model jednookresowy dwustanowy

$S_0 = 100$, $r = 10\%$, $S_1(\omega_1) = 70$, $S_1(\omega_2) = 110$

$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_1 \mid \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_1) = \frac{70}{1{,}1} q_1 + \frac{110}{1{,}1} q_2$

$$\begin{cases} \frac{70}{1{,}1} q_1 + \frac{110}{1{,}1} q_2 = 100 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow q_1 = 1, q_2 = 0$$

Nie istnieje równoważna miara martyngałowa, ale np. dla $q_1' = 0,9, q_2' = 0,1$ mamy

$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_1) = \frac{70}{1{,}1} q_1' + \frac{110}{1{,}1} q_2' \approx 67,27 < 100$, zatem istnieje równoważna miara nadmartyngałowa.

Miarę $\mathbb{Q}$ nazywamy równoważną miarą nadmartyngałową dla zdyskontowanego procesu cen $\tilde{S}$, gdy miara $\mathbb{Q}$ jest równoważna z $\mathbb{P}$ oraz $\tilde{S}$ jest nadmartyngałem względem $\mathbb{Q}$.

Charakteryzacja braku arbitrażu bez krótkiej sprzedaży

Miarę $\mathbb{Q}$ nazywamy równoważną miarą nadmartyngałową dla zdyskontowanego procesu cen $\tilde{S}$, gdy miara $\mathbb{Q}$ jest równoważna z $\mathbb{P}$ oraz $\tilde{S}$ jest nadmartyngałem względem $\mathbb{Q}$.

Twierdzenie

Nie ma możliwości arbitrażu bez krótkiej sprzedaży wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje równoważna miara nadmartyngałowa.

Krótka sprzedaż

Krótka sprzedaż

Zalety:

Krótka sprzedaż

Zalety:

1. możliwość zarabiania na spadkach

Krótka sprzedaż

Zalety:

1. możliwość zarabiania na spadkach
2. symetria rynku

Krótka sprzedaż

Zalety:

1. możliwość zarabiania na spadkach
2. symetria rynku
3. zwiększona płynność

Krótka sprzedaż

Zalety:

1. możliwość zarabiania na spadkach
2. symetria rynku
3. zwiększona płynność

Wady:

1. możliwość strat na wzrostach

Krótka sprzedaż

Zalety:

1. możliwość zarabiania na spadkach
2. symetria rynku
3. zwiększona płynność

Wady:

1. możliwość strat na wzrostach
2. konieczność utrzymywania depozytu zabezpieczającego

Krótka sprzedaż

Zalety:

1. możliwość zarabiania na spadkach
2. symetria rynku
3. zwiększona płynność

Wady:

1. możliwość strat na wzrostach
2. konieczność utrzymywania depozytu zabezpieczającego
3. konieczność płacenia odsetek od wartości pożyczonych akcji - jak każda pożyczka, tak i ta jest oprocentowana

Krótka sprzedaż

- Krótka sprzedaż jako cecha rozwiniętych rynków finansowych

- Krótka sprzedaż jako cecha rozwiniętych rynków finansowych
- Krótka sprzedaż a kryzys finansowy na świecie

- J. Jakubowski, A. Palczewski, M. Rutkowski, Ł. Stettner, *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, (2003).
- S. R. Pliska, *Wprowadzenie do matematyki finansowej. Modele z czasem dyskretnym*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, (2005).
- A. Rygiel, Ł. Stettner, *Arbitrage for simple strategies*, praca złożona.