Teoria preferencji i jej alternatywy

Dariusz Zawisza
Instytut Matematyki UJ

10 maj 2012

Racjonalność

Racjonalny decydent:

- rzetelnie pozyskuje informacje i właściwie je interpretuje - decydent zna możliwe konsekwencje swoich decyzji,
- na podstawie dostępnych informacji **porządkuje** projekty, działania i inwestycje w celu maksymalizacji własnych korzyści.
- jest wolny od obciążeń emocjonalnych i norm etycznych.

Oznaczenia

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probablistyczna,

$\mathcal{X}$ - zbiór zmiennych losowych przyjmujących wartości w odcinku $[0, 1]$ (zmienne opisujące wyniki różnych loterii lub zyski z inwestycji),

$S_X(z) := P(X > z)$ - funkcja przeżycia,

$\preceq$ - relacja preferencji określona na zbiorze $\mathcal{X}$ porządkująca losowe korzyści z różnych inwestycji.

Aksjomaty Morgensterna i von Neumanna (1944)

Aksjomaty Morgensterna i von Neumanna (1944)

EU1 Jeśli X i Y mają te same rozkłady, to $X \preceq Y$ i $Y \preceq X$.

Aksjomaty Morgensterna i von Neumanna (1944)

EU1 Jeśli X i Y mają te same rozkłady, to $X \preceq Y$ i $Y \preceq X$.

EU2 Relacja $\preceq$ jest zwrotna przechodnia i spójna i.

Aksjomaty Morgensterna i von Neumanna (1944)

EU1 Jeśli X i Y mają te same rozkłady, to $X \preceq Y$ i $Y \preceq X$.

EU2 Relacja $\preceq$ jest zwrotna przechodnia i spójna i.

EU3 Relacja $\preceq$ jest ciągła ze względu na zbieżnośc w L_1: dla dowolnych $X, Y \in \mathcal{X}$, $X \preceq Y$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że jeśli $\|X - V\|_{L^1} < \varepsilon$ $\|Y - Z\|_{L^1} < \varepsilon$, to $V \preceq Z$.

Aksjomaty Morgensterna i von Neumanna (1944)

EU1 Jeśli X i Y mają te same rozkłady, to $X \preceq Y$ i $Y \preceq X$.

EU2 Relacja $\preceq$ jest zwrotna przechodnia i spójna i.

EU3 Relacja $\preceq$ jest ciągła ze względu na zbieżnośc w L_1: dla dowolnych $X, Y \in \mathcal{X}$, $X \preceq Y$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że jeśli $\|X - V\|_{L^1} < \varepsilon$ $\|Y - Z\|_{L^1} < \varepsilon$, to $V \preceq Z$.

EU4 Monotoniczność: jeśli $S_X \leq S_Y$, to $X \preceq Y$.

Aksjomaty Morgensterna i von Neumanna (1944)

- EU1 Jeśli X i Y mają te same rozkłady, to $X \preceq Y$ i $Y \preceq X$.
- EU2 Relacja $\preceq$ jest zwrotna przechodnia i spójna i.
- EU3 Relacja $\preceq$ jest ciągła ze względu na zbieżnośc w L_1: dla dowolnych $X, Y \in \mathcal{X}$, $X \preceq Y$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że jeśli $\|X - V\|_{L^1} < \varepsilon$ $\|Y - Z\|_{L^1} < \varepsilon$, to $V \preceq Z$.
- EU4 Monotoniczność: jeśli $S_X \leq S_Y$, to $X \preceq Y$.
- EU5 Niezależność: jeśli $\alpha \in [0, 1]$ i $Z \in \mathcal{X}$, to

$$X \preceq Y \Longrightarrow \alpha S_X + (1 - \alpha)S_Z \preceq \alpha S_Y + (1 - \alpha)S_Z.$$

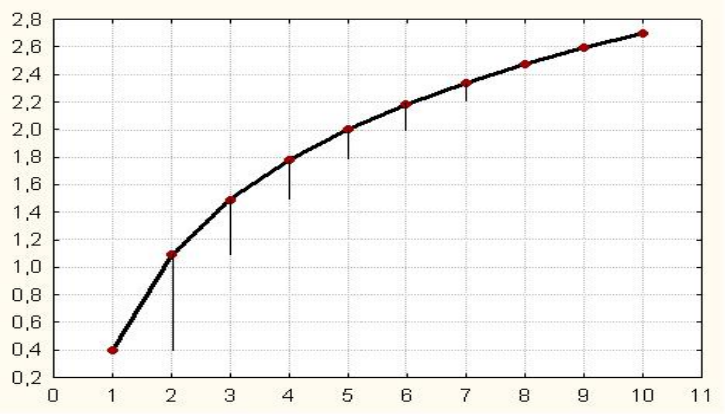
Twierdzenie o reprezentacji

Twierdzenie

Aksjomaty EU1 - EU5 są spełnione wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja u ciągła i niemalejąca na [0,1] taka, że

$$X \preceq Y \Leftrightarrow \mathbb{E}u(X) \leq \mathbb{E}u(Y).$$

Funkcja u powinna być funkcją wklęsłą (malejące przyrosty posiadają interpretację ekonomiczną).



- Dla decydenta z wklęsłą funkcją użyteczności

$$\mathbb{E}u(X) \leq u(\mathbb{E}X).$$

- Dla decydenta z wklęsłą funkcją użyteczności

$$\mathbb{E}u(X) \leq u(\mathbb{E}X).$$

- Powiemy, że takiego decydenta cechuje awersja do ryzyka.

Funkcja użyteczności przykłady

- Funkcja HARA

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^\gamma}{\gamma}, \text{ dla } \gamma \neq 0, \gamma < 1, \\ \ln x, \text{ dla } \gamma = 0. \end{cases}$$

- funkcja CARA

$$u(x) = 1 - e^{-\gamma x}, \quad \gamma > 0.$$

- funkcja kwadratowa

$$u(x) = ax - \frac{1}{2}bx^2, \quad a, b > 0.$$

Wybór najlepszej strategii finansowej

r_s - stopa zwrotu z pewnej akcji (zmienna losowa),

w - procentowa wartość kapitału zainwestowanego w akcje,

r - stopa procentowa na lokacie,

$r_w := wr_s + (1 - w)r$ stopa zwtotu z całego portfela (zmienna losowa),

Wybór najlepszej strategii finansowej

r_s - stopa zwrotu z pewnej akcji (zmienna losowa),

w - procentowa wartość kapitału zainwestowanego w akcje,

r - stopa procentowa na lokacie,

$r_w := wr_s + (1 - w)r$ stopa zwtotu z całego portfela (zmienna losowa),

Ile powinno wynosić w?

Optymalna strategia c. d.

Odpowiedź:

$$w^* \in \arg\max \mathbb{E}u(r_w).$$

Optymalna strategia c. d.

Odpowiedź:

$$w^* \in \arg\max \mathbb{E}u(r_w).$$

Warunek konieczny istnienia maksimum:

$$\mathbb{E}[(r_s - r)u'(r_w)] = 0.$$

Model Markowitza

H. Markowitz [1952](Nagroda Nobla w 1990) zaproponował optymalizację portfela za pomocą maksymalizacji funkcji

$$L(w) := \mathbb{E}r_w - \frac{\theta}{2}Var(r_w), \qquad \theta > 0 \text{ - parametr awersji do ryzyka .}$$

Równoważnik pewności

Definicja

Równoważnikiem pewności nazywamy taką wielkość zysku, jaką można uzyskać bez ryzyka, a której użyteczność jest równa oczekiwanej użyteczności X. Innymi słowy równoważnik pewności C_X zmiennej losowej X spełnia warunek

$$u(C_X) = \mathbb{E}u(X).$$

Korzystając z rozwinięcia Taylora

$$\mathbb{E}u(X) \approx u(\mathbb{E}X) + \frac{1}{2}u''(\mathbb{E}X)Var(X),$$
$$\mathbb{E}u(X) \approx u(C_X) \simeq u(\mathbb{E}X) + u'(\mathbb{E}X)(C_X - \mathbb{E}X).$$

Stąd

$$C_x \approx \mathbb{E}X + \frac{1}{2}\frac{u''(\mathbb{E}X)}{u'(\mathbb{E}X)}Var(X).$$

Stąd

$$C_x \approx \mathbb{E}X + \frac{1}{2}\frac{u''(\mathbb{E}X)}{u'(\mathbb{E}X)}Var(X).$$

Definicja

Niech u będzie dwukrotnie różniczkowalną funkcją użyteczności. Wtedy

$$\alpha(x) := -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

nazywana jest współczynnikiem bezwzględnej awersji do ryzyka Arrowa-Pratta.

Składka ubezpieczeniowa

w - majątek ubezpieczyciela,

X - strata spowodowana wypłatą ubezpieczenia,

H - składka ubezpieczeniowa,

Zakład ubezpieczeń powinien ustalić składkę H tak, aby

$$u(w) \leq \mathbb{E}u(w - X + H).$$

Minimalny poziom składki powinien spełniać równanie

$$u(w) = \mathbb{E}u(w - X + H).$$

czyli

$$w \leq \mathbb{E}(w - X + H)$$

i

$$\mathbb{E}X \leq H.$$

Krytyka

- Nie można aksjomatyzować zachowań: ludzie pod wpływem stresu i strachu mogą podejmować decyzje inne od „racjonalnych”.
- H. Simon (Nagroda Nobla 1978) zwraca uwagę, że napotykając różnorodne ograniczenia czasowe i technologiczne ludzie nie są w stanie uzyskać i przetworzyć wszystkich informacji istotnych dla danego problemu.
- Krytyka aksjomatów (najmocniej aksjomatu niezależności): eksperymenty socjologiczne i psychologiczne nie potwierdziły zachowań zgodnych z teorią oczekiwanej użyteczności (paradoks Allaisa, paradoks Ellsberga)

Dual theory of choice

Yaari [1987] zmienił aksjomat niezależności otrzymując reprezentację liczbową relacji preferencji postaci.

$$X \preceq Y \Leftrightarrow \int_0^1 g\big(P(X > x)\big)dx \leq \int_0^1 g\big(P(Y > x)\big)dx.$$

Całka Choqueta

- Centralne miejsce w powyższej reprezentacji zajmuje całka

$$\int_0^{+\infty} g\big(P(X > x)\big)\,dx.$$

Całka Choqueta

- Centralne miejsce w powyższej reprezentacji zajmuje całka

$$\int_0^{+\infty} g\big(P(X > x)\big)\,dx.$$

- Jeśli $g(x) = x$, to

$$\int_0^{+\infty} g\big(P(X > x)\big)\,dx = \int_0^{+\infty} P(X > x)dx = \mathbb{E}X.$$

Całka Choqueta dla zmiennych dyskretnych

Zmienna X przyjmuje wartości w zbiorze dyskretnym $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

$0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

$P(X = x_i) = p_i$,

$s(x_i) := P(x > x_i) = \sum_{k=i+1}^{n} p_k$,

$s(x_n) = 0$, $s(x_{k-1}) - s(x_k) = p_k$,

$g(0) = 0$, $g(1) = 1$

$$\int_0^{+\infty} g(P(X > x))dx = \sum_{k=0}^{n-1} g\left(s(x_k)\right)\left(x_{k+1} - x_k\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \left[g\left(s(x_{k-1})\right) - g\left(s(x_k)\right)\right].$$

Zdeformowane miary ryzyka-definicja

X - zmienna losowa reprezentująca stratę, lub płatności, które powinny zostać dokonane.

Definicja

Zdeformowaną miarą ryzyka (distortion risk measure) wyznaczoną przez funkcję rosnącą g ($g(0) = 0$, $g(1) = 1$), nazywamy funkcjonał

$$\rho_g(X) = \int_{-\infty}^{0} [g(P(X > x)) - 1]dx + \int_{0}^{+\infty} g(P(X > x))dx.$$

Własności

- **Monotoniczność**

$$\text{Jeśli } X \leq Y, \text{ to } \rho_g(X) \leq \rho_g(Y).$$

Własności

- **Monotoniczność**

$$\text{Jeśli } X \leq Y, \text{ to } \rho_g(X) \leq \rho_g(Y).$$

- **Dodatnia jednorodność**

$$\rho_g(\lambda X) = \lambda \rho_g(X), \text{ dla } \lambda > 0.$$

Własności

- **Monotoniczność**

$$\text{Jeśli } X \leq Y, \text{ to } \rho_g(X) \leq \rho_g(Y).$$

- **Dodatnia jednorodność**

$$\rho_g(\lambda X) = \lambda \rho_g(X), \text{ dla } \lambda > 0.$$

- **Niezmienniczość względem przesunięcia**

$$\rho_g(X - c) = \rho_g(X) - c, \text{ dla } c \in \mathbb{R}.$$

Własności

- **Monotoniczność**

$$\text{Jeśli } X \leq Y, \text{ to } \rho_g(X) \leq \rho_g(Y).$$

- **Dodatnia jednorodność**

$$\rho_g(\lambda X) = \lambda \rho_g(X), \text{ dla } \lambda > 0.$$

- **Niezmienniczość względem przesunięcia**

$$\rho_g(X - c) = \rho_g(X) - c, \text{ dla } c \in \mathbb{R}.$$

- **Subaddytywność** (dla wklęsłej funkcji g)

$$\rho_g(X + Y) \leq \rho_g(X) + \rho_g(Y).$$

Przykłady

- VaR (Value at Risk) (dla rozkładów ciągłych)

$$VaR_\alpha(X) = \sup\{x | P(X > x) \geq \alpha\} = \rho_{g_\alpha}(X),$$

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leq x < \alpha, \\ 1, & \text{jeśli } \alpha \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Przykłady

- VaR (Value at Risk) (dla rozkładów ciągłych)

$$VaR_\alpha(X) = \sup\{x | P(X > x) \geq \alpha\} = \rho_{g_\alpha}(X),$$

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leq x < \alpha, \\ 1, & \text{jeśli } \alpha \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- CVaR (Conditional Value at Risk) (dla rozkładów ciągłych)

$$CVaR_\alpha(X) = \mathbb{E}(X | X > VaR_\alpha(X)),$$

$$g_\alpha(x) = \min\left(\frac{x}{\alpha}, 1\right).$$

Przykłady c. d.

Przykłady c. d.

- Potęgowa funkcja deformująca

$$g_\alpha(x) = x^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Przykłady c. d.

- Potęgowa funkcja deformująca

$$g_\alpha(x) = x^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

- Deformująca funkcja Giniego

$$g_\alpha(x) = (1+\alpha)x - \alpha x^2, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Przykłady c. d.

- Potęgowa funkcja deformująca

$$g_\alpha(x) = x^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

- Deformująca funkcja Giniego

$$g_\alpha(x) = (1+\alpha)x - \alpha x^2, \quad 0 < \alpha < 1.$$

- Deformacja Wanga

$$g_\alpha^W(x) = \Phi[\Phi^{-1}(x) + \alpha],$$

gdzie Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

Rank dependent expected utility theory

- Preferencje wyznaczone za pomocą funkcjonału

$$X \to \int_0^{+\infty} g\left[P\left(u(X) > x\right)\right] dx.$$

Rank dependent expected utility theory

- Preferencje wyznaczone za pomocą funkcjonału

$$X \to \int_0^{+\infty} g\left[P\left(u(X) > x\right)\right] dx.$$

- Dla zmiennych przyjmujących wartości dyskretne

$$\int_0^{+\infty} g\left[P\left(u(X) > x\right)\right] dx = \sum_{k=1}^{n} u(x_k)\left[g\left(s(x_{k-1})\right) - g\left(s(x_k)\right)\right].$$

Teoria perspektyw

Eksperymenty wykonane przez Kahnemana (Nagroda Nobla w 2002 r) i Tversky'ego [1979] wykazały, że

Teoria perspektyw

Eksperymenty wykonane przez Kahnemana (Nagroda Nobla w 2002 r) i Tversky'ego [1979] wykazały, że

- Ludzie oceniają dostępne im alternatywy ze względu na pewien punkt odniesienia, którego umiejscowienie zależy od ich aktualnego bogactwa, przeszłych doświadczeń, etc.

Teoria perspektyw

Eksperymenty wykonane przez Kahnemana (Nagroda Nobla w 2002 r) i Tversky'ego [1979] wykazały, że

- Ludzie oceniają dostępne im alternatywy ze względu na pewien punkt odniesienia, którego umiejscowienie zależy od ich aktualnego bogactwa, przeszłych doświadczeń, etc.
- Funkcja użyteczności (tu nazwana funkcją oceny) jest wklęsła dla prognoz pozytywnych i wypukła dla prognoz negatywnych.

Teoria perspektyw

Eksperymenty wykonane przez Kahnemana (Nagroda Nobla w 2002 r) i Tversky'ego [1979] wykazały, że

- Ludzie oceniają dostępne im alternatywy ze względu na pewien punkt odniesienia, którego umiejscowienie zależy od ich aktualnego bogactwa, przeszłych doświadczeń, etc.
- Funkcja użyteczności (tu nazwana funkcją oceny) jest wklęsła dla prognoz pozytywnych i wypukła dla prognoz negatywnych.
- Ludzie bardzo rzadkie zdarzenia traktują jako niemożliwe a niektóre zdarzenia uznane jako wysoce prawdopodobne traktują jak pewne.

Teoria perspektyw c. d.

Kierując się przedstawionymi przesłankami ustalono, że preferencje powinny być oparte na funkcjonale

$$X \Longrightarrow V_+[(X-L)^+] - V_-[(X-L)^-], \text{ gdzie}$$

$$V_+(X) = \int_0^{+\infty} g_+\left[P\left(u_+(X) > x\right)\right] dx,$$
$$V_-(X) = \int_0^{+\infty} g_-\left[P\left(u_-(X) > x\right)\right] dx,$$

u_+, u_- są wklęsłymi i rosnącymi funkcjami na $\mathbb{R}^+$,

g_+ wklęsła na $[0,1]$, $g_+(0) = 0$, $g_+(1) = 1$, $g_+(p) \geq p$,

g_- wklęsła na $[0,1]$, $g_-(0) = 0$, $g_-(1) = 1$.

Maxmin choice

$\mathcal{Q}$ - zbiór prawdopodobieństw wyznaczających zakres błędu popełnionego przy konstrukcji modelu.

Gilboa i Schmeidler [1989] zaproponowali relację opartą o kryterium najgorszego możliwego scenariusza

$$X \preceq Y \iff \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^Q u(X) \leq \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^Q u(Y),$$

gdzie u jest funkcją użyteczności.

Funkcja kary

Macheroni et al. [2006] zaproponowali aksjomatykę dla relacji

$$X \preceq Y \iff \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^Q \left[u(X) - \alpha(Q|P) \right] \leq \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^Q \left[u(Y) - \alpha(Q|P) \right],$$

gdzie $\alpha(Q|P)$ określa „odległość" dwóch prawdopodobieństw.

Literatura I

- Gilboa I, Schmeidler D. *Maxmin expected utility with non-unique prior*. J Math Econ 18 (1989), 141–153
- Kahneman, D. and Tversky, A., (1979): *Prospect theory: an analysis of decision under risk*, Econometrica, 47, 263-291.
- Maccheroni,Fabio; Marinacci, Massimo; Rustchini, Aldo *Ambiguity aversion, Robustness, and Variational Representation of Preferences* Econometrica, Vol. 74, No. 6 (2006), 1447-1498
- Markowitz H. (1952) Portfolio selection. J Finance 7: 77–91

Literatura II

von Neumann, John; Morgenstern, Oskar *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1944

Yaari, Menahem E. *The dual theory of choice under risk*. Econometrica 55 (1987), no. 1, 95–115.

Dziękuję za uwagę.