Optymalne portfele inwestycyjne

Dariusz Zawisza
Instytut Matematyki UJ

10 maj 2012

Oznaczenia

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probablistyczna,

$r_i := \frac{S_i^1 - S_i^0}{S_i^0}$ - stopa zwrotu z i - tej akcji w danym okresie (zmienna losowa),

$r := (r_1, r_2, \ldots, r_n)$,

$\mu_i := \mathbb{E} r_i$ - oczekiwana stopa zwrotu z i-tej akcji,

$\sigma_{i,j} := \mathrm{Cov}(r_i, r_j) \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$,

σ - sciśle dodatnio określona macierz kowariancji.

Portfel inwestycyjny

w_i - procent kapitału zainwestowany w i - tą akcję,

$w := (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ - portfel inwestycyjny,

$r_w = w_1 r_1 + w_2 r_2 + \ldots + w_n r_n$ - stopa zwrotu z portfela,

$\mu_w := \mathbb{E} r_w = w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2 + \ldots + w_n \mu_n = \mu w^T$ - oczekiwana stopa zwrotu z portfela,

$\sigma_{w,w} := \mathrm{Var}(r_w) = \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j} = w \sigma w^T$ - wariancja portfela.

Dlaczego wariancja?

Jedna z możliwych definicji ryzyka brzmi:

Ryzyko to możliwość uzyskania efektu różnego od oczekiwanego.

Jako miarę tak rozumianego ryzyka przyjmuje się często wariancję:

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$,

względnie odchylenie standardowe $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Dywersyfikacja

r_1 - stopa zwrotu pierwszej akcji,
r_2 - stopa zwrotu drugiej akcji,
$\sigma_{2,2} = \sigma_{1,1}$,
$\sigma_{1,2} = 0$,

$w \in (0, 1)$ - procent kapitału zainwestowany w pierwszą akcję,
r_w - stopa zwrotu z portfela,

$$\mathrm{Var}(r_w) = w^2\sigma_{1,1} + (1-w)^2\sigma_{2,2} + 2w(1-w)\sigma_{1,2} = (w^2 + (1-w)^2)\sigma_{1,1}.$$

Problem Markowitza

$\theta > 0$ - parametr awersji do ryzyka.

Zmaksymalizować:

$$\mathbb{E}r_w - \frac{1}{2\theta}\,\mathrm{Var}(r_w)$$

przy warunku ograniczającym

$$w_1 + w_2 + \dots w_n = 1.$$

Autor problemu: Harry Markowitz: (publikacja w roku 1952), Nagroda Nobla - 1990.

Rozwiązanie problemu

$\theta > 0$ - **ustalony parametr awersji do ryzyka.**

Rozwiązanie wykorzystuje mnożniki Lagrange'a:

- Dla każdego λ znaleźć $w^*(\lambda)$, które maksymalizuje funkcję

$$G(w, \lambda) = \mu w^T - \frac{1}{2\theta} w \sigma w^T - \lambda(w_1 + w_2 + \ldots + w_n),$$

Rozwiązanie problemu

$\theta > 0$ - **ustalony parametr awersji do ryzyka.**

Rozwiązanie wykorzystuje mnożniki Lagrange'a:

- Dla każdego λ znaleźć $w^*(\lambda)$, które maksymalizuje funkcję

$$G(w, \lambda) = \mu w^T - \frac{1}{2\theta} w \sigma w^T - \lambda(w_1 + w_2 + \ldots + w_n),$$

- Wyznaczyć taki parametr λ, dla którego

$$w_1^*(\lambda) + w_2^*(\lambda) + \ldots + w_n^*(\lambda) = 1.$$

Rozwiązanie problemu c. d.

Należy zatem rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} w_1\sigma_{1,1} + w_2\sigma_{1,2} + \ldots + w_n\sigma_{1,n} = \theta(\mu_1 - \lambda), \\ w_1\sigma_{2,1} + w_2\sigma_{2,2} + \ldots + w_n\sigma_{2,n} = \theta(\mu_2 - \lambda), \\ \vdots \\ w_1\sigma_{n,1} + w_2\sigma_{n,2} + \ldots + w_n\sigma_{n,n} = \theta(\mu_n - \lambda), \\ w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie problemu c. d.

Należy zatem rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} w_1\sigma_{1,1} + w_2\sigma_{1,2} + \ldots + w_n\sigma_{1,n} = \theta(\mu_1 - \lambda), \\ w_1\sigma_{2,1} + w_2\sigma_{2,2} + \ldots + w_n\sigma_{2,n} = \theta(\mu_2 - \lambda), \\ \vdots \\ w_1\sigma_{n,1} + w_2\sigma_{n,2} + \ldots + w_n\sigma_{n,n} = \theta(\mu_n - \lambda), \\ w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1. \end{cases}$$

Z pierwszych n równań otrzymujemy rozwiązanie w postaci macierzowej

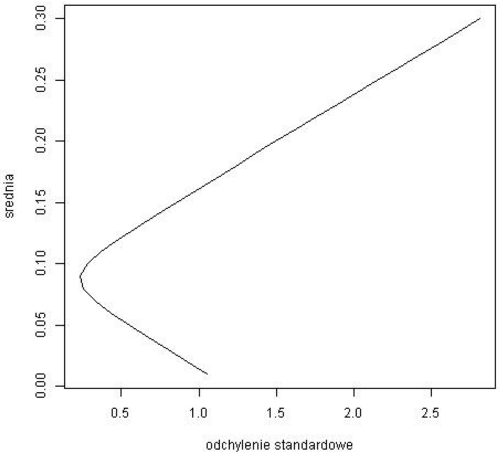
$$w^T = \theta\sigma^{-1}\left(\mu - \lambda\mathbf{1}\right)^T, \qquad \mathbf{1} := (1, 1, \ldots, 1).$$

Ostatnie równanie oznacza, że

$$\theta\mathbf{1}\sigma^{-1}\left(\mu - \lambda\mathbf{1}\right)^T = 1, \quad \text{czyli} \quad \lambda = \frac{\mathbf{1}\sigma^{-1}\mu^T - \frac{1}{\theta}}{\mathbf{1}\sigma^{-1}\mathbf{1}^T}.$$

Granica efektywna

- Rozwiązujemy problem Markowitza, dla każdego parametru awersji do ryzyka θ.
- Dla każdego rozwiązania obliczamy $\mathbb{E}_\theta$ - wartość oczekiwaną portfela optymalnego i $\sqrt{\mathrm{Var}_\theta}$ - odchylenie standardowe.
- Granica efektywna (ang. efficient frontier) to krzywa o parametryzacji
$$\theta \to \left(\sqrt{\mathrm{Var}_\theta}, \mathbb{E}_\theta\right).$$


0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
srednia
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
odchylenie standardowe

Twierdzenie o dwóch portfelach

w^* - portfel optymalny dla parametru awersji do ryzyka θ^*,
$\hat{w}$ - portfel optymalny dla parametru awersji do ryzyka $\hat{\theta}$.

Twierdzenie o dwóch portfelach

w^* - portfel optymalny dla parametru awersji do ryzyka θ^*,
$\hat{w}$ - portfel optymalny dla parametru awersji do ryzyka $\hat{\theta}$.

Tworzymy nowy portfel:

$$w_\alpha := \alpha w^* + (1-\alpha)\hat{w}, \quad \alpha < 1.$$

Twierdzenie o dwóch portfelach

w^* - portfel optymalny dla parametru awersji do ryzyka θ^*,
$\hat{w}$ - portfel optymalny dla parametru awersji do ryzyka $\hat{\theta}$.

Tworzymy nowy portfel:

$$w_\alpha := \alpha w^* + (1-\alpha)\hat{w}, \quad \alpha < 1.$$

Tak stworzony portfel jest rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} w_1\sigma_{1,1} + w_2\sigma_{1,2} + \ldots w_n\sigma_{1,n} = (\alpha\theta^* + (1-\alpha)\hat{\theta})(\mu_1 - \lambda(\alpha)), \\ w_1\sigma_{2,1} + w_2\sigma_{2,2} + \ldots w_n\sigma_{2,n} = (\alpha\theta^* + (1-\alpha)\hat{\theta})(\mu_2 - \lambda(\alpha)), \\ \vdots \\ w_1\sigma_{n,1} + w_2\sigma_{n,2} + \ldots w_n\sigma_{n,n} = (\alpha\theta^* + (1-\alpha)\hat{\theta})(\mu_n - \lambda(\alpha)), \\ w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1. \end{cases}$$

Twierdzenie o dwóch portfelach c. d.

Wniosek I: w_α jest rozwiązaniem optymalnym dla parametru awersji do ryzyka równego $\alpha\theta^* + (1-\alpha)\hat{\theta}$.

Wniosek II: Dla dowolnego parametru θ istnieje takie α, że

$$\theta = \alpha\theta^* + (1-\alpha)\hat{\theta}.$$

Twierdzenie

Istnieją dwa portele efektywne takie, że wykorzystując różne ich kombinacje można znaleźć dowolny inny portfel efektywny.

Problem równoważny I

$$L(w,\theta) = \mathbb{E}r_w - \frac{1}{2\theta}\operatorname{Var}(r_w)$$

jest funkcją Lagrange'a dla problemu:
zmaksymalizować

$$\mathbb{E}r_w$$

przy warunku ograniczającym

$$\operatorname{Var}(r_w) \leq h.$$

Problem równoważny II

$$L(w,\theta) = \mathbb{E}r_w - \frac{1}{2\theta}\operatorname{Var}(r_w) = -\frac{1}{2\theta}\left[\operatorname{Var}(r_w) - 2\theta\mathbb{E}r_w\right]$$

jest funkcją Lagrange'a dla problemu:

zminimalizować

$$\operatorname{Var}(r_w)$$

przy warunku ograniczającym

$$\mathbb{E}r_w = R.$$

Gdy krótka sprzedaż jest zabroniona

Możliwy do rozwiazania jest nastepujący problem:

Zmaksymalizować:

$$\mathbb{E}r_w - \frac{1}{2\theta}\mathrm{Var}(r_w)$$

przy warunku ograniczającym

$$w_1 + w_2 + \ldots w_n = 1,$$

$$w_i \geq 0, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Optymalizacja z aktywami wolnymi od ryzyka

r_0 - stopa wolna od ryzyka ($\mathrm{Var}(r_0) = 0$),

$w = (w_0, \bar{w}) = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$ - portfel inwestycyjny.

Problem:
zmaksymalizować

$$H(w, \theta) := r_0 w_0 + \mu \bar{w}^T - \frac{1}{2\theta} \bar{w} \sigma \bar{w}^T$$

przy warunkach ograniczających

$$w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1.$$

Aktywa wolne od ryzyka - rozwiązanie

Wyliczając w_0 z ostatniego równania i podstawiając do funkcji H (eliminacja warunku ograniczającego)

$$H(\bar{w},\theta) := r_0(1 - w_1 - w_2 - \ldots - w_n) + \mu\bar{w}^T - \frac{1}{2\theta}\bar{w}\sigma\bar{w}^T.$$

Różniczkując otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} w_1\sigma_{1,1} + w_2\sigma_{1,2} + \ldots + w_n\sigma_{1,n} = \theta(\mu_1 - r_0), \\ w_1\sigma_{2,1} + w_2\sigma_{2,2} + \ldots + w_n\sigma_{2,n} = \theta(\mu_2 - r_0), \\ \vdots \\ w_1\sigma_{n,1} + w_2\sigma_{n,2} + \ldots + w_n\sigma_{n,n} = \theta(\mu_n - r_0). \end{cases}$$

Aktywa wolne od ryzyka - rozwiązanie c. d.

Rozwiązanie problemu:

$$\bar{w}^T = \theta\sigma^{-1}\left(\mu^T - r_0\mathbf{1}^T\right),$$

$$w_0 = 1 - \theta\mathbf{1}\sigma^{-1}\left(\mu^T - r_0\mathbf{1}^T\right).$$

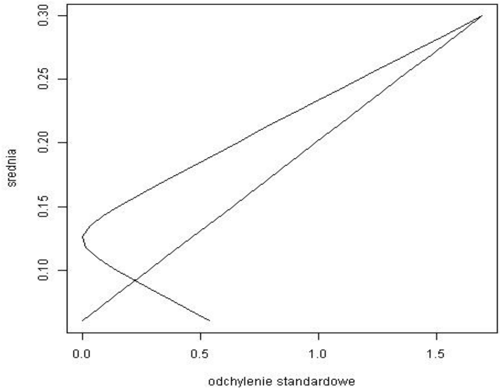
Oczekiwana stopa zwrotu i wariancja portfela efektywnego:
(w zależności od parametru awersji do ryzyka θ)

$$\mu_w(\theta) = r_0 w_0 + \mu\bar{w}^T = r_0 + \theta(\mu - r_0\mathbf{1})\sigma^{-1}\left(\mu^T - r_0\mathbf{1}^T\right),$$

$$\sqrt{\sigma_{ww}(\theta)} = \sqrt{\bar{w}\sigma\bar{w}^T} = \theta\sqrt{\left(\mu - r_0\mathbf{1}\right)\sigma^{-1}\left(\mu^T - r_0\mathbf{1}^T\right)}.$$

Aktywa wolne od ryzyka - granica efektywna

Wniosek: Po wprowadzeniu aktywów wolnych od ryzyka granica efektywna ma kształt lini prostej.



Twierdzenie o jednym portfelu

$\hat{w}$ - portfel optymalny dla parametru awersji do ryzyka $\hat{\theta}$.

Twierdzenie o jednym portfelu

$\hat{w}$ - portfel optymalny dla parametru awersji do ryzyka $\hat{\theta}$.

Tworzymy nowy portfel

$$w_\alpha := \alpha(1, 0, 0, \dots, 0) + (1 - \alpha)\hat{w}, \quad \alpha < 1.$$

Twierdzenie o jednym portfelu

$\hat{w}$ - portfel optymalny dla parametru awersji do ryzyka $\hat{\theta}$.

Tworzymy nowy portfel

$$w_\alpha := \alpha(1, 0, 0, \dots, 0) + (1-\alpha)\hat{w}, \quad \alpha < 1.$$

Tak stworzony portfel jest rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} w_1\sigma_{1,1} + w_2\sigma_{1,2} + \dots + w_n\sigma_{1,n} = (1-\alpha)\hat{\theta}(\mu_1 - r_0), \\ w_1\sigma_{2,1} + w_2\sigma_{2,2} + \dots + w_n\sigma_{2,n} = (1-\alpha)\hat{\theta}(\mu_2 - r_0), \\ \vdots \\ w_1\sigma_{n,1} + w_2\sigma_{n,2} + \dots + w_n\sigma_{n,n} = (1-\alpha)\hat{\theta}(\mu_n - r_0). \end{cases}$$

Twierdzenie o jednym portfelu c. d.

Wniosek:

w_α jest rozwiązaniem optymalnym dla parametru awersji do ryzyka równego $(1-\alpha)\hat{\theta}$.

Twierdzenie o jednym portfelu c. d.

Wniosek:

w_α jest rozwiązaniem optymalnym dla parametru awersji do ryzyka równego $(1-\alpha)\hat{\theta}$.

Twierdzenie

Istnieje portfel efektywny taki, że wykorzystując różne kombinacje jego i aktywa wolnego od ryzyka można znaleźć dowolny inny portfel efektywny.

Estymacja parametrów w modelu Markowitza

W praktyce zmuszeni jesteśmy korzystać przy wyznaczaniu parametrów μ i σ z danych historycznych.

$r_i^1, r_i^2, \dots r_i^k$ - zrealizowane historyczne stopy zwrotu i-tej akcji (próbka prosta)

Estymatory średniej i macierzy kowariancji:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k} r_i^l,$$

$$\hat{\sigma}_{i,j} = \frac{1}{k-1} \sum_{l=1}^{k} \left(r_i^l - \overline{r_i}\right)\left(r_j^l - \overline{r_j}\right).$$

Problemy z estymacją parametrów

Problemy:

- dane historyczne nie są dobrym predyktorem przyszłych stóp zwrotu,
- klasyczne estymatory średniej i wariancji są bardzo wrażliwe na ekstremalne stopy zwrotu.

Optymalizacja odporna

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ - zbiór niepewności oczekiwanej stopy zwrotu μ.

Problem odporny I :

Zmaksymalizować

$$\min_{\mu \in P} \left(\mu w^T - \frac{1}{2\theta} w \sigma w^T \right).$$

Optymalizacja odporna

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ - zbiór niepewności oczekiwanej stopy zwrotu μ.

Problem odporny I :
Zmaksymalizować

$$\min_{\mu \in P} \left(\mu w^T - \frac{1}{2\theta} w \sigma w^T \right).$$

Problem odporny II :
$\mathfrak{M} := \{\sigma | \underline{\sigma} \leq \sigma \leq \overline{\sigma}\}$ - przedział niepewności macierzy kowariancji.

Zmaksymalizować

$$\min_{\mu \in P} \min_{\sigma \in \mathfrak{M}} \left(\mu w^T - \frac{1}{2\theta} w \sigma w^T \right).$$

Co to jest ryzyko?

Dwie definicje

def1 Ryzyko to możliwość uzyskania efektu innego niż oczekiwany.

def2 Ryzyko to możliwość uzyskania efektu gorszego niż oczekiwany.

Definicja **def1** prowadzi do mierzenia ryzyka za pomocą wariancji i łączy się z przekonaniem iż rozkład stóp zwrotu jest symetryczny.

Inne miary ryzyka

X - zmienna losowa (domyślnie stopa zwrotu).

- Semiwariancja,

$$\rho(X) = \mathbb{E}\left[(X - EX)^{-}\right]^{2}$$

- Value at Risk (wartość zagrożona),
- koherentne miary ryzyka.

Koherentne miary ryzyka:

- **Monotoniczność**

$$\text{Jeśli } X \leq Y, \text{ to } \rho(X) \geq \rho(Y).$$

Koherentne miary ryzyka:

- **Monotoniczność**

$$\text{Jeśli } X \leq Y, \text{ to } \rho(X) \geq \rho(Y).$$

- **Dodatnia jednorodność**

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \text{ dla } \lambda > 0.$$

.

Koherentne miary ryzyka:

- **Monotoniczność**

$$\text{Jeśli } X \leq Y, \text{ to } \rho(X) \geq \rho(Y).$$

- **Dodatnia jednorodność**

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \text{ dla } \lambda > 0.$$

.

- **Niezmienniczość względem przesunięcia**

$$\rho(X + c) = \rho(X) - c, \text{ dla } c \in \mathbb{R}.$$

Koherentne miary ryzyka:

- **Monotoniczność**

$$\text{Jeśli } X \leq Y, \text{ to } \rho(X) \geq \rho(Y).$$

- **Dodatnia jednorodność**

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \text{ dla } \lambda > 0.$$

.

- **Niezmienniczość względem przesunięcia**

$$\rho(X + c) = \rho(X) - c, \text{ dla } c \in \mathbb{R}.$$

- **Subaddytywność**

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

Modyfikacja metody Markowitza

Maksymalizację

$$\mathbb{E}r_w - \frac{1}{2\theta} Var(r_w)$$

zastępujemy maksymalizacją

$$\mathbb{E}r_w - \frac{1}{2\theta} \rho(r_w),$$

gdzie ρ jest jedną sposród podanych w przykładach miar ryzyka.

Modyfikacja metody Markowitza

Maksymalizację

$$\mathbb{E}r_w - \frac{1}{2\theta} Var(r_w)$$

zastępujemy maksymalizacją

$$\mathbb{E}r_w - \frac{1}{2\theta}\rho(r_w),$$

gdzie ρ jest jedną sposród podanych w przykładach miar ryzyka.

Uwaga: Portfel optymalny będzie zależał od założonego rozkładu dla stóp zwrotu $(r_1, r_2, \dots r_n)$.

Literatura I

- Black, F., Litterman, R. – Global portfolio optimization, Financial Analysts J., 48 (1992), 28–43.
- Brandt, Michael W. (2004). Portfolio choice problems. In: Handbook of Finan- cial Econometrics (Y. A¨ýt-Sahalia and L.P. Hansen, Ed.). Elsevier.
- Goldfarb, D.; Iyengar, G. *Robust portfolio selection problems*. Math. Oper. Res. 28 (2003), no. 1, 1–38.
- Jobson, J.D., Korkie, B. – Estimation of Markowitz efficient portfolios, J. Amer. Stat. Assoc., 75 (1980), 544–554.

Literatura II

- Luenberger, D. G. 1998. Investment Science. Oxford Unversity Press, New York.
- Markowitz H. (1952) *Portfolio selection*. J Finance 7: 77–91
- Tütüncü, R. H.; Koenig, M. *Robust asset allocation*. Ann. Oper. Res. 132 (2004), 157–187.
- Palczewski A. *Optimal Asset Allocation Practitioner's Perspective* dostępny na http://www.impan.pl/EMSsummerSchool/files.php

Dziękuję za uwagę.