

# Dynamiczne stochastyczne modele równowagi ogólnej

mgr Anna Sulima

Instytut Matematyki UJ

8 maja 2012

# Spis treści

- 1 Postać modelu DSGE
  - Gospodarstwa domowe
  - Przedsiębiorstwa
  - Rząd
  - Bank centralny
- 2 Estymacja parametrów
  - Estymacja bayesowska
- 3 Zastosowanie DSGE

DSGE (Dynamic Stochastic General Equilibrium Model) to dynamiczny, stochastyczny model równowagi ogólnej opisany stochastycznym równaniem różnicowym postaci:

$$E\{f(y_{t+1}, y_t, y_{t-1}, \varepsilon_t)\} = 0$$

Jest to układ warunków pierwszego rzędu podmiotów gospodarczych, warunków ograniczających ich decyzje oraz warunków równowagi.

Elementy równowagi ogólnej modelu:

## Elementy równowagi ogólnej modelu:

- 1 sektor przedsiębiorstw

## Elementy równowagi ogólnej modelu:

- 1 sektor przedsiębiorstw
- 2 sektor gospodarstw domowych

## Elementy równowagi ogólnej modelu:

- 1 sektor przedsiębiorstw
- 2 sektor gospodarstw domowych
- 3 sektor publiczny

# Gospodarstwo domowe

Problem decyzyjny:

$$\max_{\overrightarrow{C_t}, \overrightarrow{N_t}} E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, N_t)$$

$$C_t \in \mathbb{R}, t = 0, 1, 2, \dots$$

$$N_t \in [0, 1], t = 0, 1, 2, \dots$$

$$C_t = [(1 - \alpha)^{\frac{1}{\nu}} C_{H,t}^{\frac{\nu-1}{\nu}} + \alpha^{\frac{1}{\nu}} C_{F,t}^{\frac{\nu-1}{\nu}}]^{\nu-1}$$

$$C_{H,t} = \left( \int_{[0,1]} C_{H,t}(j)^{\frac{\eta-1}{\eta}} dj \right)^{\frac{\eta}{\eta-1}}$$

$$C_{F,t} = \left( \int_{[0,1]} C_{F,t}(i)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} di \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$



# Gospodarstwo domowe

Ograniczenie budżetowe:

$$\int_{[0,1]} P_{H,t}(j) C_{H,t}(j) dj + \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} P_{i,t}(j) C_{i,t}(j) dj di + E_t(Q_{t,t+1} D_{t,t+1}) \leq D_t + W_t N_t$$

# Przedsiębiorstwo

Problem decyzyjny:

$$\max \overrightarrow{P_{H,t}} \sum_{k=0}^{\infty} E[Q_{t,t+1}(P_{H,t} Y_{t+k,t}(j) - \Psi(Y_{t+k|t}(j)))]$$

# Przedsiębiorstwo

Ograniczenie popytowe:

$$Y_{t+k|t}(j)(s) \leq \left( \frac{P_{H,t}}{P_{H,t+k}(s)} \right)^{-\epsilon} (C_{H,t+k}(s) + C_{H,t+k}^f(s))$$

# Rząd

Eksport i import:

$$x = \omega_c \left[ \frac{p^c}{p_{m,c}} \right]^\eta c + \omega_i \left[ \frac{p^i}{p_{m,i}} \right]^\eta i$$

# Rząd

PKB:

$$Y_t = (1 - \alpha)h_t + \alpha k_t + \alpha \mu_t + \epsilon_t$$

# Bank centralny

Inflacja:

$$\pi = \frac{\mu}{\mu_Z}$$

$$\mu_{Z,t} = (1 - \rho)\mu_Z + \rho\mu_{Z,t-1} + \varepsilon_t,$$
$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma)$$

# Bank centralny

Realne kursy walutowe:

$$x_t^k = \frac{S_t^k P_t^u}{P_t^e}$$

# Zaburzenia strukturalne ( $\varepsilon$ )



# Zaburzenia strukturalne ( $\varepsilon$ )

- 1 zaburzenia technologiczne,

# Zaburzenia strukturalne ( $\varepsilon$ )

- 1 zaburzenia technologiczne,
- 2 zaburzenia marż (dóbr produkowanych w kraju, importowanych dóbr inwestycyjnych, importowanych dóbr konsumpcyjnych, dóbr eksportowanych),

# Zaburzenia strukturalne ( $\varepsilon$ )

- 1 zaburzenia technologiczne,
- 2 zaburzenia marż (dóbr produkowanych w kraju, importowanych dóbr inwestycyjnych, importowanych dóbr konsumpcyjnych, dóbr eksportowanych),
- 3 zaburzenia preferencji (konsumpcji, podaży pracy, popytu)

# Zaburzenia strukturalne ( $\varepsilon$ )

- 1 zaburzenia technologiczne,
- 2 zaburzenia marż (dóbr produkowanych w kraju, importowanych dóbr inwestycyjnych, importowanych dóbr konsumpcyjnych, dóbr eksportowanych),
- 3 zaburzenia preferencji (konsumpcji, podaży pracy, popytu)
- 4 zaburzenia fiskalne i pochodzące z gospodarki światowej

# Aproksymacja liniowa modelu DSGE:

$$Y_t = Hy_t + u_t$$

$$y_t = Ay_{t-1} + B\epsilon_t$$

$$\epsilon_t, u_t \sim N(0, R)$$

# Estymacja

Estymacją nazywamy szacowanie wartości parametrów modelu na podstawie obserwacji.

# Estymacja

Estymacją nazywamy szacowanie wartości parametrów modelu na podstawie obserwacji.

- 1 Estymacja klasyczna
  - 1 Estymacja metodą najmniejszych kwadratów

# Estymacja

Estymacją nazywamy szacowanie wartości parametrów modelu na podstawie obserwacji.

- 1 Estymacja klasyczna
  - 1 Estymacja metodą najmniejszych kwadratów
  - 2 Estymacja metodą największej wiarygodności
- 2 Estymacja bayesowska



# Estymacja bayesowska

$\theta$ -wektor wszystkich parametrów, zmienna losowa

$y$ -wektor wszystkich dostępnych obserwacji

$p(\theta, y)$ -model bayesowski, łączny rozkład parametrów i obserwacji

$p(\theta|y)$ -rozkład a posteriori (rozkład parametrów warunkowy względem obserwacji)

$p(y|\theta)$ -model próbkowy (rozkład próbkowy obserwacji tj. warunkowy względem parametrów)

$p(y)$ -brzegowy rozkład obserwacji

$p(\theta)$ -rozkład a priori (brzegowy rozkład parametrów)

# Estymacja bayesowska

Rozkład łączny możemy zawsze dekomponować na brzegowy i warunkowy. Wobec tego model bayesowski możemy otrzymać na dwa sposoby:

$$p(\theta, y) = p(\theta|y)p(y)$$

$$p(\theta, y) = p(y|\theta)p(\theta)$$

# Estymacja bayesowska

Z kolei rozkłady brzegowe możemy otrzymać przez całkowanie rozkładu łącznego:

$$p(y) = \int_{\theta} p(\theta, y) d\theta = \int_{\theta} p(y|\theta)p(\theta) d\theta$$

$$p(\theta) = \int_Y p(\theta, y) dy = \int_Y p(\theta|y)p(y) dy$$

# Estymacja bayesowska

Musimy jeszcze obliczyć rozkład a posteriori  $p(\theta|y)$  :

$$p(\theta|y) = \frac{p(\theta, y)}{p(y)}$$

, ale  $p(\theta, y) = p(y|\theta)p(\theta)$

$p(y) = \int_{\theta} p(\theta, y) d\theta = \int_{\theta} p(y|\theta)p(\theta) d\theta$  więc

$$p(\theta|y) = \frac{p(\theta, y)}{p(y)} = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{\int_{\theta} p(y|\theta)p(\theta) d\theta}$$

# Estymacja bayesowska

Funkcja wiarygodności:

$$p(\theta, y) = p(y|\theta)p(\theta)$$

$$p(\theta, y) \simeq L_y(\theta)p(\theta)$$

# Zastosowanie modeli DSGE

# Zastosowanie modeli DSGE

- 1 budowanie prognoz procesów inflacyjnych i koniunktury gospodarczej,

# Zastosowanie modeli DSGE

- 1 budowanie prognoz procesów inflacyjnych i koniunktury gospodarczej,
- 2 identyfikacja szoków strukturalnych oddziałujących na dany system ekonomiczny,



# Zastosowanie modeli DSGE

- 1 budowanie prognoz procesów inflacyjnych i koniunktury gospodarczej,
- 2 identyfikacja szoków strukturalnych oddziałujących na dany system ekonomiczny,
- 3 analiza reakcji zmiennych modelu na szoki strukturalne,

# Zastosowanie modeli DSGE

- 1 budowanie prognoz procesów inflacyjnych i koniunktury gospodarczej,
- 2 identyfikacja szoków strukturalnych oddziałujących na dany system ekonomiczny,
- 3 analiza reakcji zmiennych modelu na szoki strukturalne,
- 4 analiza wpływu szoków strukturalnych na dynamikę zmiennych makroekonomicznych,

# Zastosowanie modeli DSGE

- 1 budowanie prognoz procesów inflacyjnych i koniunktury gospodarczej,
- 2 identyfikacja szoków strukturalnych oddziałujących na dany system ekonomiczny,
- 3 analiza reakcji zmiennych modelu na szoki strukturalne,
- 4 analiza wpływu szoków strukturalnych na dynamikę zmiennych makroekonomicznych,
- 5 są narzędziem do podejmowania decyzji w polityce pieniężnej NBP oraz polityce gospodarczej rządu,

## Bibliografia

1. An S., Schorfheide F., 2007, Bayesian Analysis of DSGE Models, *Econometric Reviews*
2. Christiano L. J., Eichenbaum M., Evans C. L., 2005, Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy, *Journal of Political Economy*
3. G. Grabek, B. Kłos, G. Koloch, SOE- Model DSGE małej otwartej gospodarki estymowany na polskich danych, *Materiały i Studia*, zeszyt nr 251
4. Smets F., Wouters R., 2003, An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Area, *Journal of European Economic Association*, 97(3): 586-606.
5. Smets F., Wouters R., 2007, Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach, *American Economic Review*,